# 第9章　　第一次习题课

## 一、内容提要及教学要求

### 1、熟练掌握两类曲线积分的计算

1) $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$　（$\alpha<\beta$）

2) $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$

这里下限 $\alpha$ 对应于$L$的起点，上限 $\beta$ 对应于$L$的终点。

## 基本方法（直接计算）：

曲线积分 $\begin{cases} \text{第一类（对弧长）} \\ \text{第二类（对坐标）} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{转化}}$ 定积分

## 注意点：

(1) 选择适当的曲线方程 $\begin{cases} \text{用直角坐标方程} \\ \text{用参数方程} \\ \text{用极坐标方程} \end{cases}$

(2) 确定积分上下限 $\begin{cases} \text{第一类：下小上大} \\ \text{第二类：下始上终} \end{cases}$

## 2 两类曲线积分的关系

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$的求法：

$L: x=\varphi(t), y=\psi(t)$，起点$A$ 、终点$B$分别对应参数 $\alpha$、 $\beta$。

$$T^{\circ} = \{\cos\alpha, \cos\beta\} = \pm\left\{\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}, \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right\}$$

(当 $\alpha < \beta$时取正号， $\alpha > \beta$时取负号)

## 3 格林公式

1) 公式 $\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint\limits_L Pdx+Qdy.$ $D$为单连通域

$$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint\limits_{L+l} Pdx+Qdy.$$ $D$为复连通域

2） $D$的面积 $A=\frac{1}{2}\oint_L -ydx+xdy.$

3）注意格林公式 应用的条件：$P,Q$具有一阶连续偏导，$L$为封闭曲线。若不满足，则应(i) 挖洞。(ii) 添线成为封闭曲线。

4 $\int_L Pdx + Qdy$与路径无关

（1） 条件　　　（2）应用

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1)dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y)dy$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} Q(x_1, y)dy + \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2)dx$$

5 全微分求积

$$u(x,y) \underline{\underline{\text{先积}x}} \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$$

$$\underline{\underline{\text{先积 }y}} \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx$$

## 6、 4个等价条件

| | 与路径无关的四个等价命题 |
|---|---|
| 条件 | 在单连通开区域 $D$ 上 $P(x,y),Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数, 则以下四个命题成立. |
| 等价命题 | (1) 在 $D$ 内 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关<br>(2) $\oint_C Pdx+Qdy=0$, 闭曲线 $C\subset D$<br>(3) 在 $D$ 内存在 $u(x,y)$ 使 $du=Pdx+Qdy$<br>(4) 在 $D$ 内, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ |

## 7 基本技巧

(1) 利用曲线方程、对称性及质心公式简化计算 ；

$$\oint_L x ds = \bar{x} \cdot \oint_L ds$$

(2) 利用格林公式（注意加辅助线的技巧）；

(3) 利用积分与路径无关的等价条件;

(4) 利用原函数法;

(5) 利用两类曲线积分的联系公式 .

## 二、典型例题

**例1** 填空

(1)已知 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,$ $L$的长度为$a$

$$\oint_L [3x^2+4y^2-\sin(xy)]ds = \_\_\_\_\_\_$$

(2) 已知$L$为圆周$:(x-a)^2+y^2=a^2, \oint_L xds = __$

(3) 设$f(x,y)$在$\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$具有连续的二阶偏导，$L$是椭圆的逆时针方向,$\oint_L [3y+f_x(x,y)]dx+f_y(x,y)dy = \_\_\_\_$

(1) 已知 $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $L$的长度为$a$，求

$$\oint_L [3x^2+4y^2-\sin(xy)]ds$$

解： $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 即$3x^2+4y^2=12$，所以

$$\oint_L (3x^2+4y^2)ds = \oint_L 12ds = 12a.$$

又$L$关于$x$轴对称，而$\sin(xy)$关于$y$为奇函数，所以

$$\oint_L \sin(xy)ds = 0$$ 于是 $I = 12a$。

注： 应充分利用L的方程简化被积函数。

(2) 已知$L$为圆周：$(x-a)^2+y^2=a^2, \oint_L x\,ds=$ ___

解：$x=a+a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$

$ds=a\,d\theta \qquad \oint_L x\,ds=\int_0^{2\pi}(a+a\cos\theta)a\,d\theta=2\pi a^2$

解法二：$\oint_L x\,ds=\bar{x}\cdot\oint_L ds=\bar{x}\cdot 2\pi a=2\pi a^2$

(3) 设$f(x,y)$在$\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$具有连续的二阶偏导，$L$是椭圆的逆时针方向,求

$$\oint_L [3y+f_x(x,y)]dx+f_y(x,y)dy$$

解 利用格林公式

$$\oint_L [3y+f_x(x,y)]dx+f_y(x,y)dy$$

$$=\iint_D [f_{yx}-3-f_{xy}]dxdy=-3\iint_D dxdy$$

$$=-3\cdot 2\pi=-6\pi$$

(4) $\oint_L \frac{(x^3+e^y)dx+(xe^y+y^3-8y)dy}{9x^2+4y^2} =$ ______

$L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 顺时针方向

解 原式 $= \frac{1}{36}\oint_L (x^3+e^y)dx+(xe^y+y^3-8y)dy$

$$= -\frac{1}{36}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = -\frac{1}{36}\iint_D (e^y-e^y)dxdy$$

$= 0$

注： 应充分利用$L$的方程简化被积函数。

例2 计算$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$,其中$L$为圆周 $x^2+y^2=ax$.

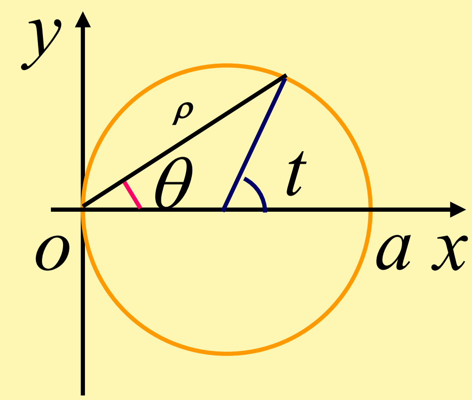
解：利用极坐标，$L:\rho=a\cos\theta\ \ (-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

$$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=a\,d\theta$$

$$\text{原式}=\int_L\sqrt{ax}\,ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta}\cdot a\,d\theta=2a^2$$

说明：若用参数方程计算,则

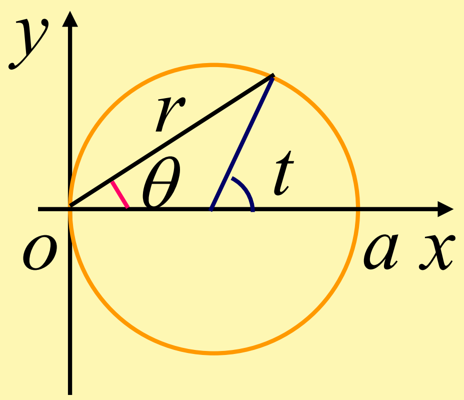
$$L:\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}(1+\cos t)\\ y=\dfrac{a}{2}\sin t\end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$$



$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \frac{a}{2}dt$$

原式 $= \int_L \sqrt{ax}\,ds$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{1+\cos t} \cdot \frac{1}{2} a\,dt$$




$$= \frac{\sqrt{2}}{4} a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,|\cos\frac{t}{2}|\,dt$$

$$\underline{\underline{\frac{t}{2}=u}}\quad a^2 \int_0^{\pi} |\cos u|\,du$$

$$= a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos u\,du\right] = 2a^2$$

例3 计算曲线积分$I=\int_L \cos(\vec{k},\vec{t})ds$,$L$为$xoy$平面上的任意简单闭曲线,$\vec{k}$为一常向量,$\vec{t}$是曲线$L$的单位切向量。

解 设$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 则$\vec{t}=\{\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}},\frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}\}$

$$=\{\cos\alpha,\cos\beta)$$

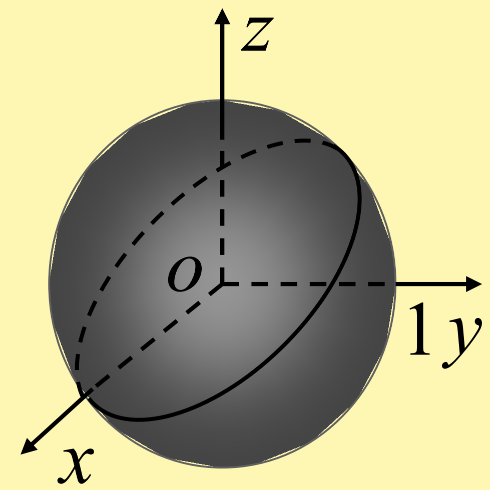
$$\cos(\vec{k},\vec{t})=\frac{\vec{k}\cdot\vec{t}}{|\vec{k}|\cdot|\vec{t}|}=\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$I=\int_L \cos(\vec{k},\vec{t})ds \quad =\oint_L \frac{a\cos\alpha+b\cos\beta}{\sqrt{a^2+b^2}}ds$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\oint_L adx+bdy$$ 利用格林公式: $I=0$

例4、计算 $\int_{\Gamma} xyz\,dz$，其中$\Gamma$由平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$所得，从 $z$ 轴正向看沿逆时针方向.

解：$\Gamma$在$xoy$面上的投影为：$\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$




$$\Gamma:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t \quad t:0\to 2\pi \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases}$$

原式 $= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{8}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{8}t-\frac{1}{32}\sin 4t\right]\Big|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}$$

**例5** 证明积分$\int_L (e^x\cos y+2xy^2)dx+(2x^2y-e^x\sin y)dy$

与路径无关。若 $L$为以 $A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的任意

简单曲线，计算积分的值。

解　易验证$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=4xy-e^x\sin y$

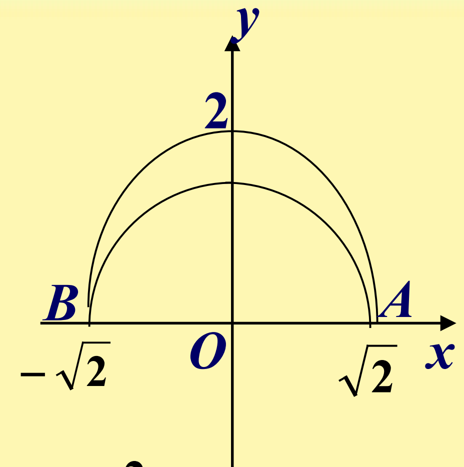
$$\text{原式}=\int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},\pi)}(e^x\cos y+2xy^2)dx+(2x^2y-e^x\sin y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x dx+\int_0^{\pi}(\frac{\pi^2}{2}y-e^{\frac{\pi}{2}}\sin y)dy\ =-e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi^4}{4}-1$$

或：$$\text{原式}=(e^x\cos y+x^2y^2)\Big|_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},\pi)}=-e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi^4}{4}-1$$

**例6** 计算 $\int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$

$L$：$y=2-x^2$上从$A(\sqrt{2}，0)$到$B(-\sqrt{2}，0)$的一段有向弧段。




解：$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-(x+y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)-(x-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

所以 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad (x^2+y^2\neq 0)$$

取$l$为$x^2+y^2=2$上从点$A(\sqrt{2}，0)$经上半圆到点$B(-\sqrt{2}，0)$的有向曲线，则

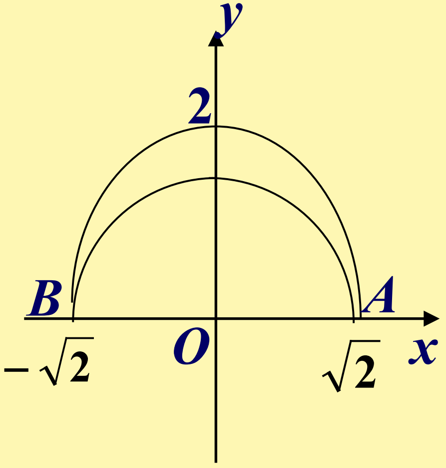
$$\int_L = \int_l \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$

$l$: $x^2+y^2=2$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta)(-\sqrt{2}\sin\theta)+\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)\cdot\sqrt{2}\cos\theta}{2}d\theta$$

$$= \cdots$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$




或 $\int_L = \int_l = \frac{1}{2}\int_l (x-y)dx+(x+y)dy = \frac{1}{2}\oint_{l+\overline{BA}} - \frac{1}{2}\int_{\overline{BA}}$

$$= \frac{1}{2}\iint_D [1-(-1)]dxdy - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}}(x-0)dx+0$$

$$= \iint_D dxdy - 0 = \pi$$

## 三、综合题

**例7** 设$Q(x,y)$具有连续的一阶偏导数，曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$与路径无关，且对$\forall t$,恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy,$$

求$Q(x,y)$.

**解：** 由积分与路径无关知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$

故 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$ 其中 $\varphi(y)$ 为待定函数。

取折线作为积分路径

左端$=\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+(x^2+\varphi(y))dy$

$\underline{\underline{先积x}}$ $\int_0^t 0dx+\int_0^1[t^2+\varphi(y)]dy \quad = t^2+\int_0^1\varphi(y)dy$

右端$=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+(x^2+\varphi(y))dy \quad =\int_0^1 0dx+\int_0^t[1+\varphi(y)]dy$

$$=t+\int_0^t\varphi(y)dy$$

由题设有 $t^2+\int_0^1\varphi(y)dy=t+\int_0^t\varphi(y)dy$

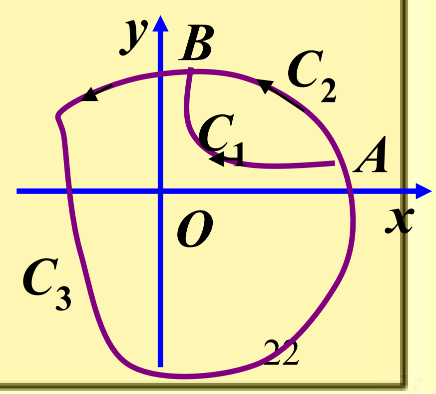
两端对$t$求导 $2t=1+\varphi(t),\varphi(t)=2t-1$

所以 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)=x^2+2y-1$

**例8** 已知$I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{\varphi(x)+2y^2}=A$(为常数),$\varphi(x)$的一阶导数连续，$\varphi(1)=1$, $L$为包围原点一周的任一正向闭曲线。(1):证明在任一不包围原点的单连通区域内该曲线积分与路径无关。(2):确定$\varphi(x)$,并求$A$.

解：在不含原点的单连通区域内，任作两条起点为A终点为B的光滑曲线$C_1$、$C_2$。

再补充一条光滑曲线$C_3$使$C_1+C_3$和$C_2+C_3$成为包围原点的正向曲线（如图所示）




则由题设知 $\oint_{C_1+C_3} = \oint_{C_2+C_3} = A$

所以有 $\displaystyle\int_{C_1}\frac{xdy-ydx}{\varphi(x)+2y^2}=\int_{C_2}\frac{xdy-ydx}{\varphi(x)+2y^2}$

**例8** 已知$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{\varphi(x)+2y^2}=A$(为常数),$\varphi(x)$的一阶导数连续，$\varphi(1)=1$,$L$为包围原点一周的任一正向闭曲线。(1):证明在任一不包围原点的单连通区域内该曲线积分与路径无关。(2):确定$\varphi(x)$,并求$A$.

由$C_1$、$C_2$的任意性知，在不含原点的单连通区域内，该曲线积分与路径无关。

（2） 由（1）知，在$(x, y)\neq(0, 0)$时，应恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{即} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\varphi(x)+2y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{\varphi(x)+2y^2}\right)$$

$$\frac{\varphi(x)+2y^2-x\varphi'(x)}{(\varphi(x)+2y^2)^2}=-\frac{\varphi(x)+2y^2-4y^2}{(\varphi(x)+2y^2)^2}=\frac{-\varphi(x)+2y^2}{(\varphi(x)+2y^2)^2}$$

$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{\varphi(x)+2y^2}=A,\quad \varphi(1)=1, L$为包围原点一周的任一正向闭曲线。(2):确定$\varphi(x)$,并求$A$.

$$\Rightarrow x\varphi'(x)=2\varphi(x) \Rightarrow \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{2}{x} \qquad \int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\int\frac{2}{x}dx,$$

$$\Rightarrow \ln|\varphi(x)|=2\ln|x|+C_1 \Rightarrow \varphi(x)=Cx^2$$

由$\varphi(1)=1 \Rightarrow \varphi(x)=x^2$

取L：$x^2+2y^2=1$，取逆时针方向。则

$$A=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+2y^2}=\oint_L xdy-ydx=\iint_D[1-(-1)]dxdy$$

$$=2\sigma=\sqrt{2}\pi$$

例9 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$

$L$为$D$的正向边界，证明：

1). $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx$

2). $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx \ge 2\pi^2$

证明：1). $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx$ 把曲线分四段进行计算

$$= \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x} + e^{-\sin x})dx = \text{右边}$$

或用格林公式：左边 $= \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})dxdy$

右边 $= \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})dxdy$

根据轮换对称：左边 $=$ 右边

例9 已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$

$L$为$D$的正向边界，证明：

1). $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx$

2). $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx \ge 2\pi^2$

(2): 左边 $= \iint\limits_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})dxdy$

$$= \iint\limits_D e^{\sin y}dxdy + \iint\limits_D e^{-\sin x}dxdy$$

$$= \iint\limits_D e^{\sin x}dxdy + \iint\limits_D e^{-\sin x}dxdy$$

$$= \iint\limits_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x})dxdy \ge 2\iint\limits_D dxdy = 2\pi^2$$ 考研题